確率・統計処理 & 真値推定

カルマン・フィルタ 入門

Part 6: カルマン・フィルタ

リニア・テック　別府 伸耕

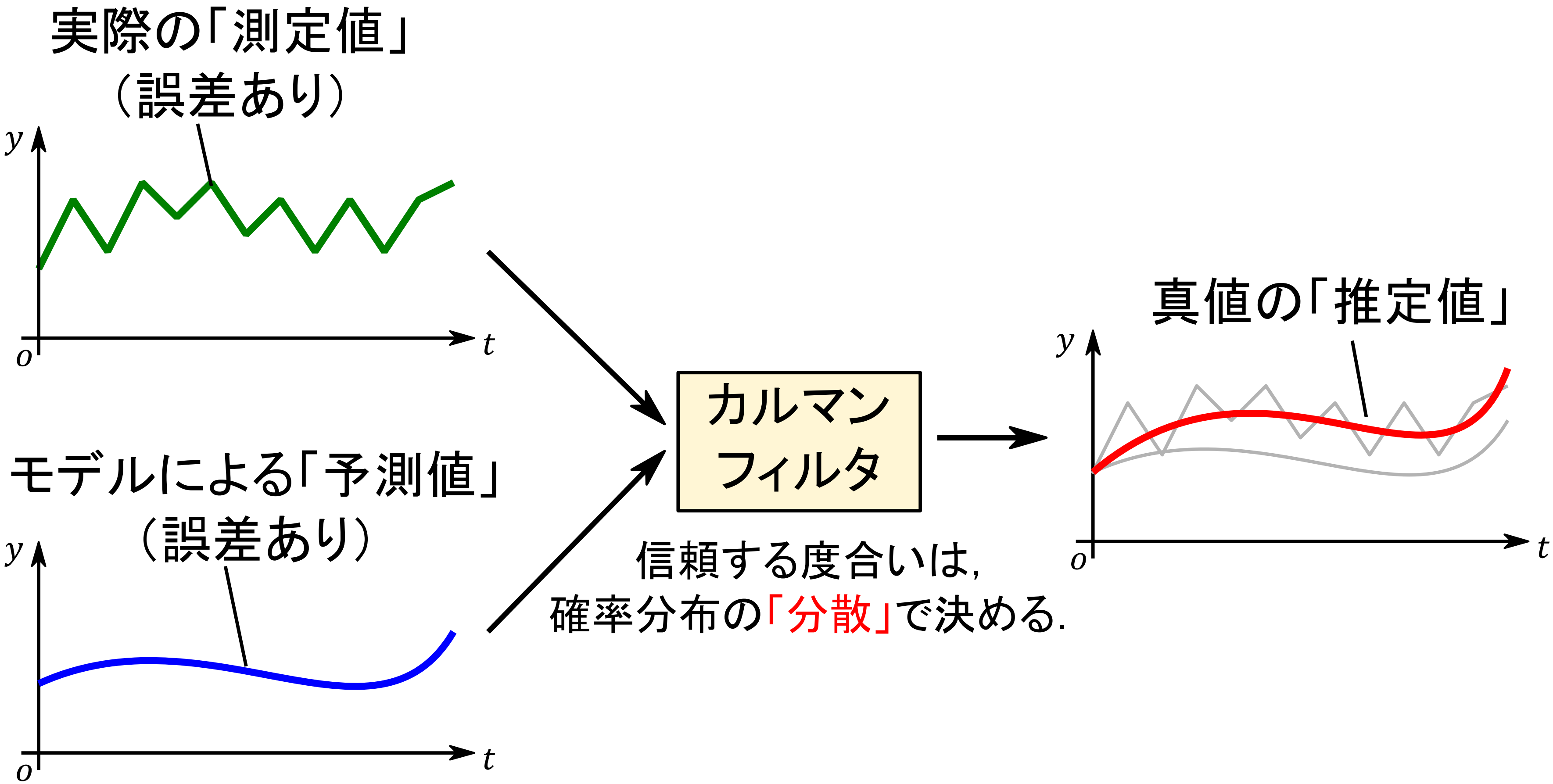
linear tec : Nobuyasu Beppu

カルマン･フィルタ

Sample

- イントロ
- 時系列データ
- 最大事後確率推定（1変数）
- カルマン･フィルタの導出（1変数）

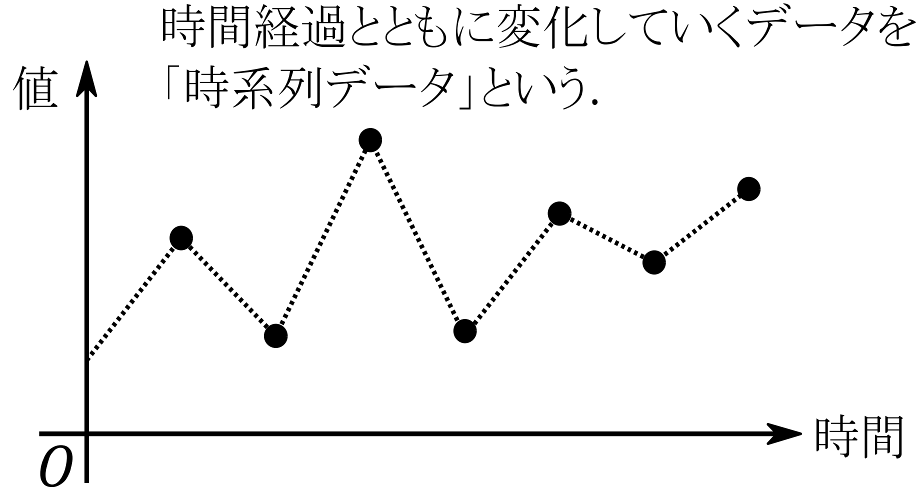
カルマン･フィルタの動作



時系列データ: time series data

Sample

「時間の推移にともなう一連のデータ」のことを，「時系列データ」という.

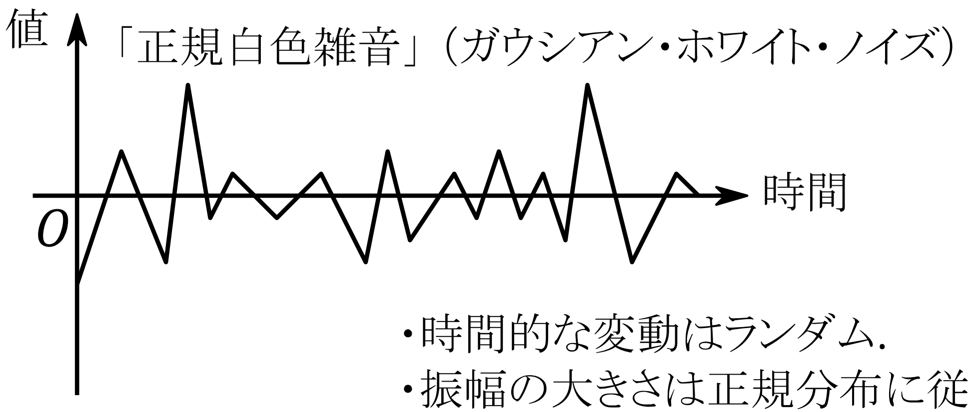


時系列データの挙動を分析することを「時系列解析」(time series analysis)という.
時系列解析では，データをもとにして現在，過去，未来の値を「推定」する.

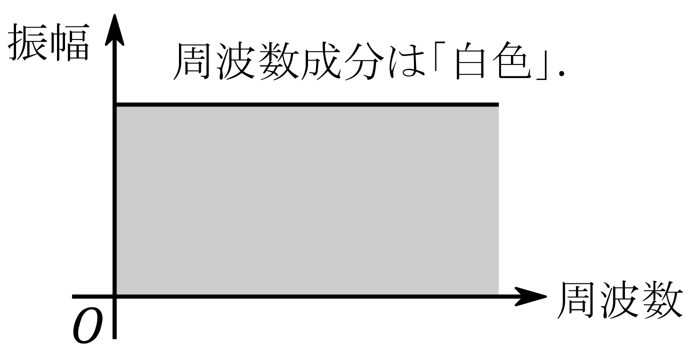
推定の正確さを表現するには「確率」の言葉が使われる.
データの整理には「統計学」の手法が使われる.
よって，時系列解析は統計学の応用分野として位置づけられている.

正規白色雑音: Gaussian white noise

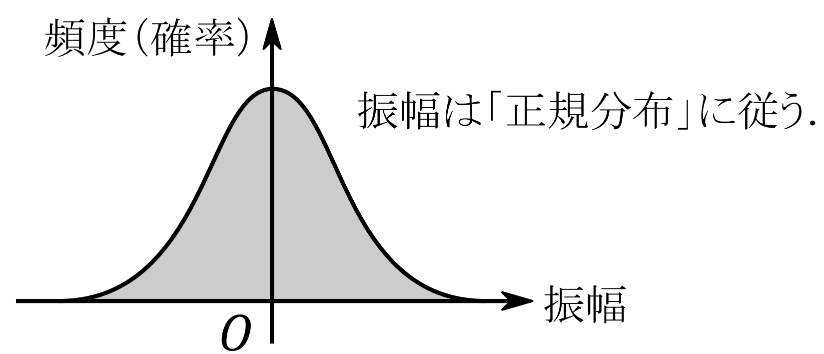
時系列データを扱う上で，「雑音」(noise)は重要な要素となる．
雑音は，「本来の信号(真値)に付加される望ましくない変動」を指す．
一般的な雑音は，「正規白色雑音」としてモデル化する．



・時間的な変動はランダム．
・振幅の大きさは正規分布に従う．



(a) 正規白色雑音の周波数スペクトル



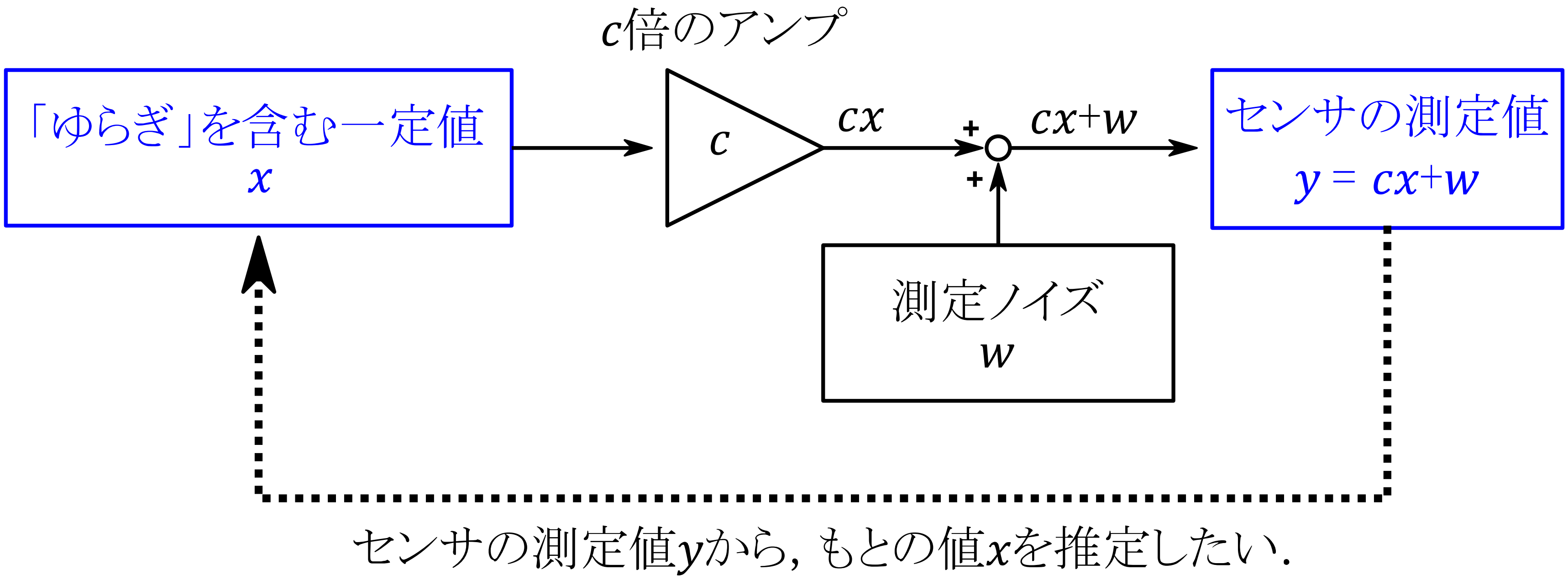
(b) 正規白色雑音の振幅の分布

測定系のモデル

Sample

何らかの，一定値を保つように制御されているパラメータ“x”を考える.
このxは，時々刻々と変化している(ゆらいでいる)とする.
この「真値x」を，雑音を含む測定系で測定した値を「測定値y」とする.

これ以降，「測定値y」をもとにして「真値x」の推定値を算出する方法を考える.



最大事後確率推定の流れ

Sample

信号xの確率密度関数$p_X(x)$を正規分布だと仮定．
雑音wの確率密度関数$p_W(w)$を正規分布だと仮定．

↓

xとyの同時確率密度関数$p_{X,Y}(x, y)$を導出．

↓

測定値yが従う確率密度関数$p_Y(y)$を導出．

↓

ベイズの定理$p_{X|Y}(x|y) = p_{X,Y}(x, y)/p_Y(y)$より
xが従う事後確率密度関数$p_{X|Y}(x|y)$を導出．

↓

$p_{X|Y}(x|y)$を最大化する値として，推定値$\hat{x}$を得る．

最大事後確率推定と時系列データ

今までは，「ある1時刻における真値の推定」を考えていた．
これからは，「時系列」を意識して最大事後確率推定を適用する．

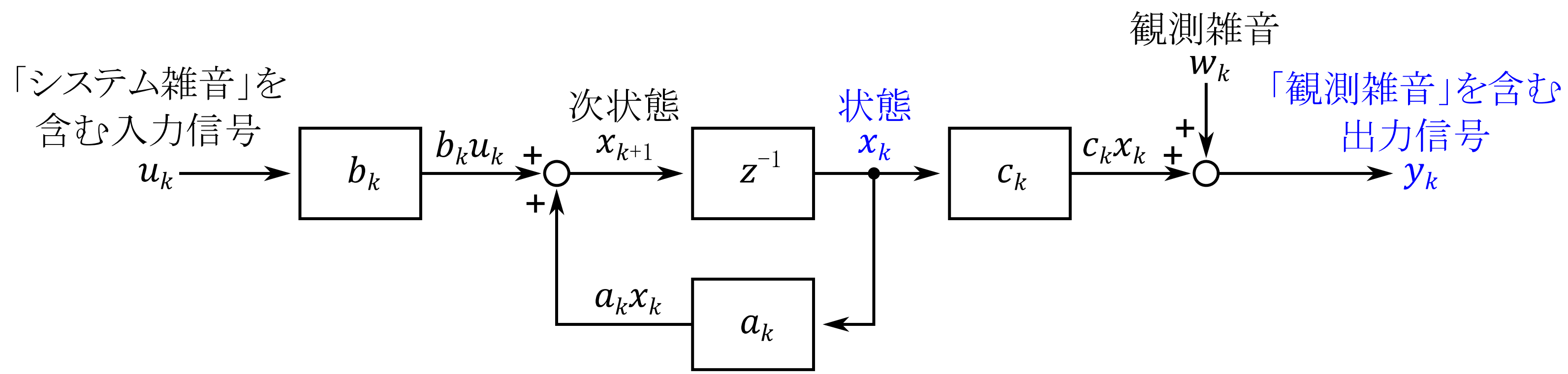
今回扱う時系列データは，次式で表される「線形システム」に従うものとする．
時刻$k+1$における状態“x_{k+1}”は，時刻kにおける状態“x_k”および入力“u_k”で定まる．
ただし，システム係数 “a_k” および “b_k” は時刻kごとに変化しても良いとする．

$$x_{k+1} = a_k x_k + b_k u_k$$

システムの観測値“y_k”は，次式で得られるとする．
ただし “c_k” はシステム係数であり，“w_k” は観測雑音とする．

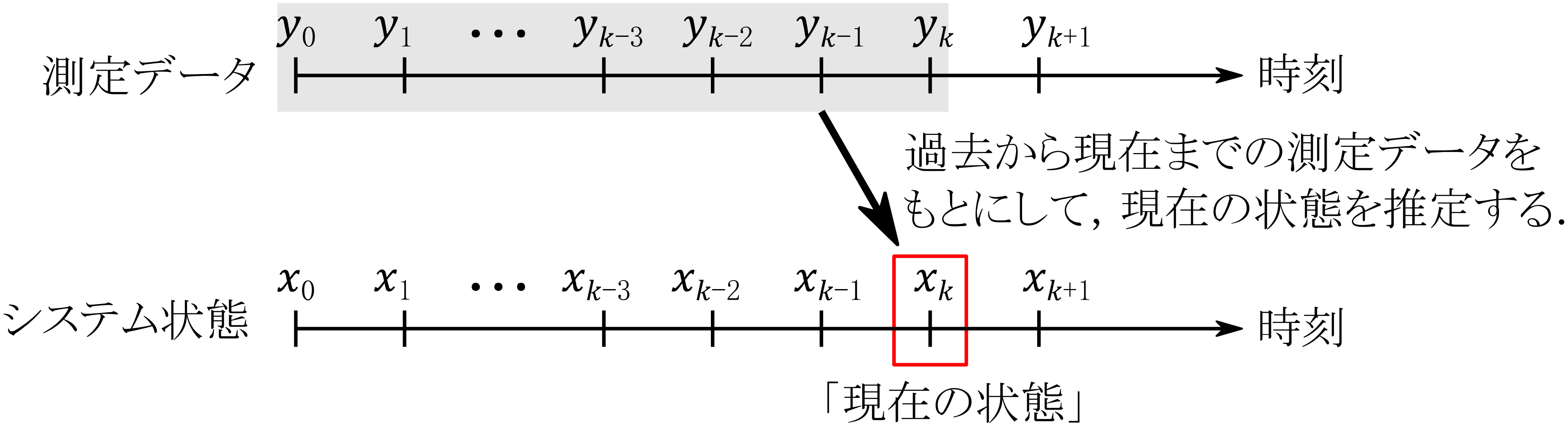
$$y_k = c_k x_k + w_k$$

以上の設定は，現代制御理論で扱った「線形システムの状態空間表現」を意識している．



カルマン・フィルタを時系列解析として考える

現在の時刻を“k”とする.
これから行うのは，手元に測定データ $y_0, y_1, \cdots, y_k$ がある前提で，
これらのデータをすべて駆使して現在の状態 “x_k” の推定値を求める作業である.



カルマン・フィルタの処理の流れ

時間の流れ

時刻 0	測定値の取得	測定値 y_0
	測定値にもとづく補正	現時点の推定値 $\hat{x}_0$　分散 $\sigma_0{}^2$
	状態方程式にもとづく予測	次時点の推定値 $\tilde{x}_1$　分散 $\sigma'_1{}^2$
時刻 1	測定値の取得	測定値 y_1
	測定値にもとづく補正	現時点の推定値 $\hat{x}_1$　分散 $\sigma_1{}^2$
	状態方程式にもとづく予測	次時点の推定値 $\tilde{x}_2$　分散 $\sigma'_2{}^2$
時刻 2	測定値の取得	測定値 y_2
	測定値にもとづく補正	現時点の推定値 $\hat{x}_2$　分散 $\sigma_2{}^2$
	状態方程式にもとづく予測	次時点の推定値 $\tilde{x}_3$　分散 $\sigma'_3{}^2$

$$\sigma_0^2 = \left(\sigma_{x_0}^{-2} + c_0^2\sigma_{w_0}^{-2}\right)^{-1}$$

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0 + c_0\sigma_{w_0}^{-2}\sigma_0^2(y_0 - c_0\bar{x}_0 - \bar{w}_0)$$

$$\sigma_1'^2 = a_0^2\sigma_0^2 + b_0^2\sigma_{u_0}^2$$

$$\tilde{x}_1 = a_0\hat{x}_0 + b_0\bar{u}_0$$

$$\sigma_1^2 = \left(\sigma_1'^{-2} + c_1^2\sigma_{w_1}^{-2}\right)^{-1}$$

$$\hat{x}_1 = \tilde{x}_1 + c_1\sigma_{w_1}^{-2}\sigma_1^2(y_1 - c_1\tilde{x}_1 - \bar{w}_1)$$

$$\sigma_2'^2 = a_1^2\sigma_1^2 + b_1^2\sigma_{u_1}^2$$

$$\tilde{x}_2 = a_1\hat{x}_1 + b_1\bar{u}_1$$

直前の1ステップ分のデータだけを
次時点の推定に利用する.
よって，メモリを節約できる.

※前時刻までの情報は
次時点の予測値に引き継がれる.