確率･統計処理 & 真値推定

カルマン･フィルタ 入門

Part 2: 線形代数

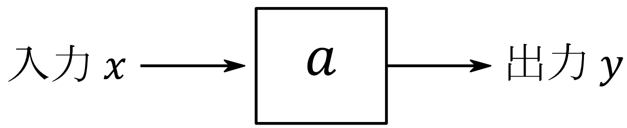
リニア･テック　別府 伸耕

linear tec : Nobuyasu Beppu

入力・出力がある「システム」を考える

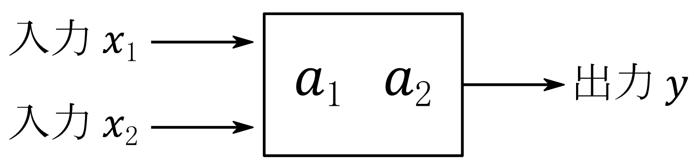
微分という「線形近似」の操作をすると，入出力の関係は次のような「1次式」で表現される.

$$y = ax$$



「複数の入力」がある場合は，次のような「多変数の1次式」になる.
この表現は，多変数関数の「全微分」に相当する.

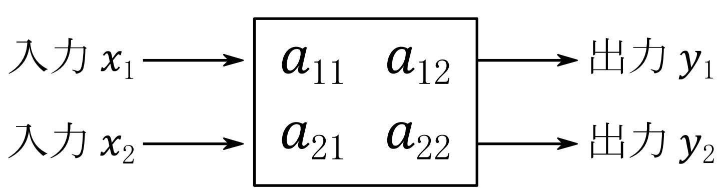
$$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$$



「複数の出力」がある場合も考える．それぞれの出力に，各入力が「線形」に影響する.
これもやはり，すべて「1次式」になる．このようなシステムを「線形システム」という.

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$



線形システムの利点

- 直感的に分かりやすく,「重ね合わせ」が成り立つ.
- 代表的な計算手法が「線形代数」として体系化されている.
- 問題を1つ1つ切り分け,最後に足し算するという手が使える.

「線形代数」の解説項目

Sample

- ベクトル
- 行列
- 行列式
- 行列と連立1次方程式
- 固有値と固有ベクトル
- 対称行列と2次形式

線形変換: linear transformation

Sample

2次元ベクトル "$\boldsymbol{x}$" を考える.
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

"$\boldsymbol{x}$" の成分に対して「線形な演算」(加算と定数倍) を施して, スカラ "y_1" を作り出す.

$$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

上式は,「ベクトル "$\boldsymbol{a}$" とベクトル "$\boldsymbol{x}$" の内積」であると見なせる.
ここで, 内積の表現として「横ベクトルと縦ベクトルを並べて書く」という記法を導入する.

$$y_1 = a x_1 + b x_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

"$\boldsymbol{x}$" の成分を使って, もうひとつのスカラ値 "y_2" を作り出す.

$$y_2 = c x_1 + d x_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

以上の "y_1" と "y_2" をまとめて, ベクトル "$\boldsymbol{y}$" を作る. このとき, 次のような表記法を採用する.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

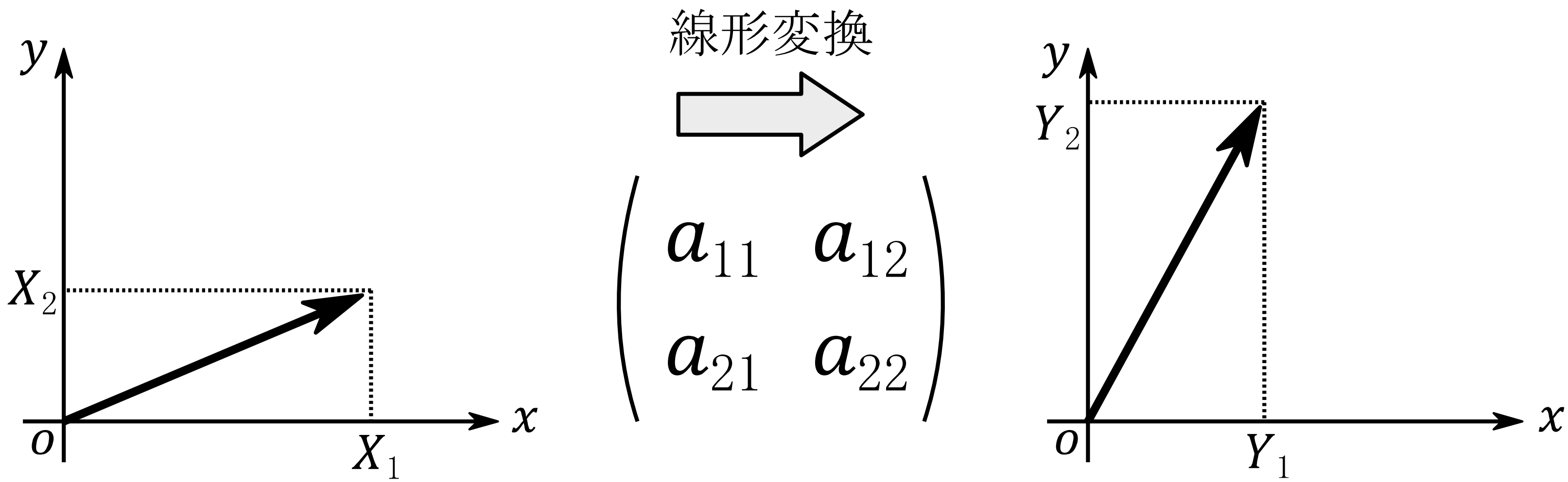
線形演算によってベクトル "$\boldsymbol{x}$" からベクトル "$\boldsymbol{y}$" を作ることを「線形変換」という.
線形変換で使う係数を並べたものを「行列」(matrix) という.

線形変換の具体例（1）

ベクトル "$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$" を「線形変換」して，新しいベクトル "$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$" を作る.

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

上式の線形変換は，2次元ベクトルを（原点を変えずに）変形する操作 だと見なせる.
これは，一般的な「図形の変形操作」に応用できる.



線形変換の具体例（2）

「時刻k」における内部状態がベクトル “$\boldsymbol{x}_k = (\, x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k) \,)$” で表される「線形離散時間システム」があったとする.

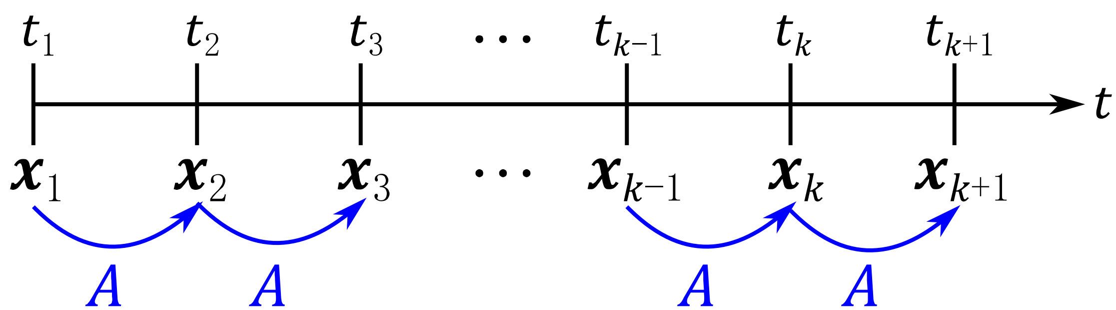
線形離散時間システム

時刻k における内部状態
（電圧や温度など）

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_\mathrm{n}(k) \end{pmatrix}$$

このようなシステムでは, 「次の時刻への状態遷移」を行列によって表現できる .

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k$$



ガウスの掃き出し法: Gaussian row reduction

連立1次方程式 “ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ” において，係数行列 “A” に定数ベクトル “$\boldsymbol{b}$” の列を加えたものを，
「拡大係数行列」（augmented matrix）といい，“$(A \mid \boldsymbol{b})$” と表す．

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

【例】次のような3元1次連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 29 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

この連立方程式の「拡大係数行列」は次のようになる．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 12 \\ 3 & 7 & 2 & 29 \\ 5 & 2 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

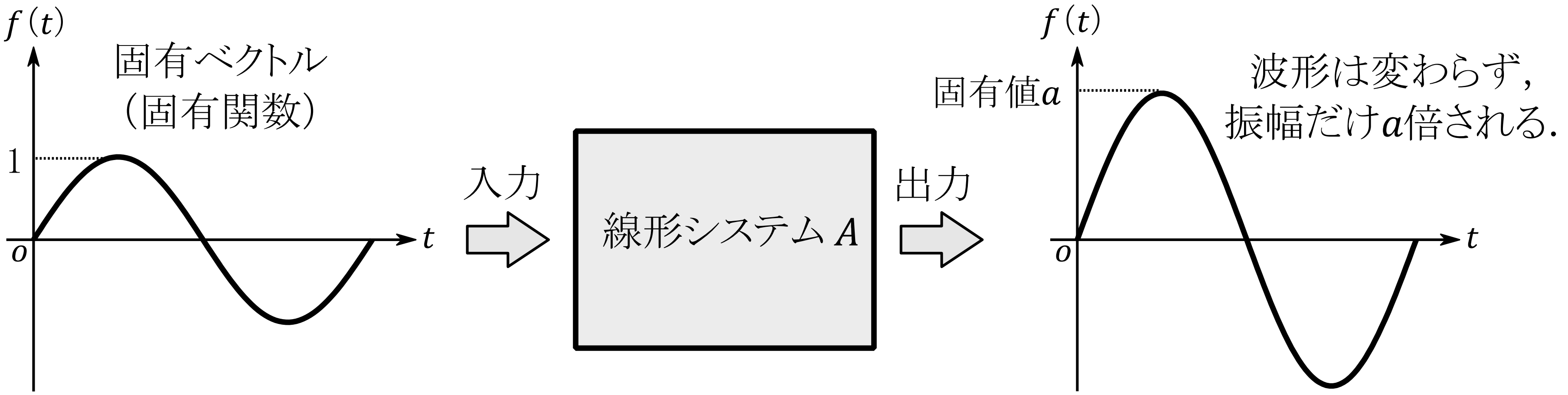
拡大係数行列を次のように変形できれば，
“$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$” の状態に相当するので，方程式が解けたことになる．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$

固有関数

Sample

前に考えたとおり，関数は1つの「ベクトル」であると見なせる．
線形システムには，「固有ベクトル」に対応する「固有関数」(eigenfunction) が存在する．



固有関数はシステムを通過しても波形が変化しない．振幅だけが「固有値倍」になる．

システムに何らかのフィードバックがある場合，
「固有値の値が1より大きい」とき，固有関数の振幅が無限大に発散してしまう．
すなわち，システムが「制御不可能」な状況に陥ってしまう．

固有値はシステムの「安定性」や「共振」といったものと関係が深いと考えられる．