確率・統計処理 & 真値推定

カルマン・フィルタ 入門

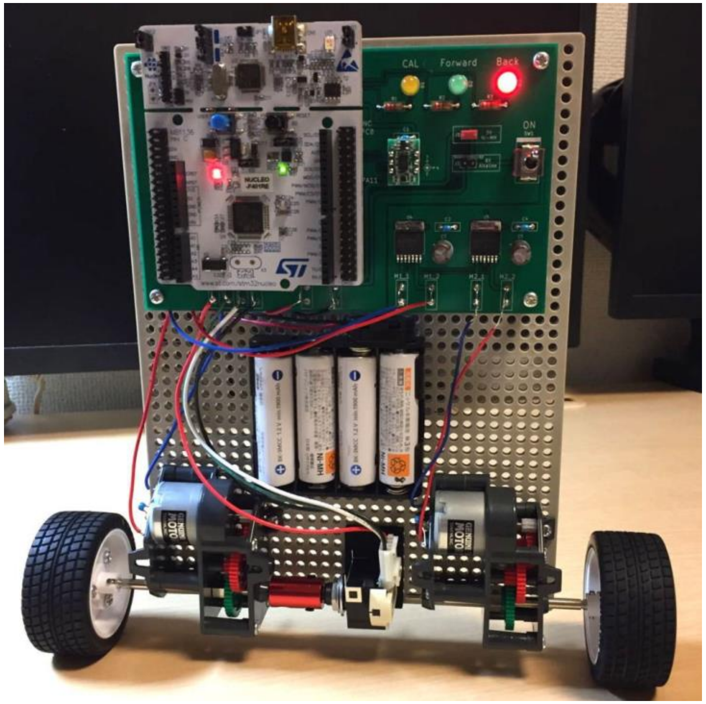
Part 1: イントロ，初等関数，微分・積分

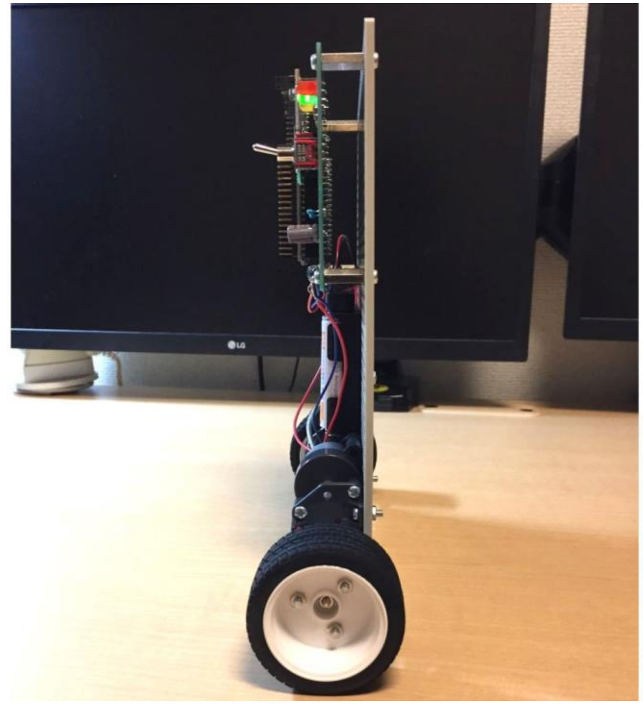
リニア・テック　別府 伸耕

linear tec : Nobuyasu Beppu

「倒立振子」（とうりつしんし）

Sample





確率・統計ロボティクス学習キット【MZIP-01】
マルツエレック株式会社からキット販売中！
https://www.marutsu.co.jp/pc/i/2176914/
（回路図，ソース・コードも上記URLで公開中）

「カルマン・フィルタ 搭載倒立振子」の理論ピラミッド

ソフトウェア開発

- C言語によるカルマン. フィルタの実装
- C言語による行列計算ライブラリ作成
- PythonによるRiccati方程式Solver作成
- Pythonによる倒立振子シミュレータ作成

ハードウェア開発

- 車体のモデル化
- DCモータのパラメータ同定
- センサの特性確認
- マイコンの各種ペリフェラル使用法

現代制御理論

- 状態方程式
- 可制御性と可観測性
- システムの安定化
- オブザーバ
- 最適制御

ディジタル信号処理

- z変換
- ディジタル・フィルタ
- カルマン・フィルタ

力学

力学
- ニュートンの運動方程式
- オイラーの回転運動方程式
- 回転座標系におけるコリオリ力

解析力学
- ラグランジュの運動方程式

電気・電子回路理論

受動回路
- LCR回路の基本
- DCモータのモデル化
- RCフィルタの設計

能動回路
- バイポーラ・トランジスタの基本
- トランジスタ回路の設計

数学

微分・積分
- 初等関数
- 微分
- 1変数の積分
- テイラー展開
- 偏微分
- 2変数の積分

線形代数
- 行列の計算
- 逆行列
- 行列の階数
- 固有値
- 固有ベクトル
- 2次形式

確率・統計
- 場合の数
- ベイズの定理
- 期待値と分散
- ガウス分布
- 中心極限定理
- 推定と検定

フーリエ解析
- フーリエ変換
- ラプラス変換

複素関数論
- 複素平面
- オイラーの公式

このセミナのコンセプト

- 信号処理とは「数学」である.
- 信号処理を理解できないのは，数学が分からないから.
- 数学が分かれば，あらゆる理工学への応用につながる.

まずは徹底的に数学の足固めをします.
確固たる土台が完成した後に，信号処理の内容について解説します.

初等関数

Sample

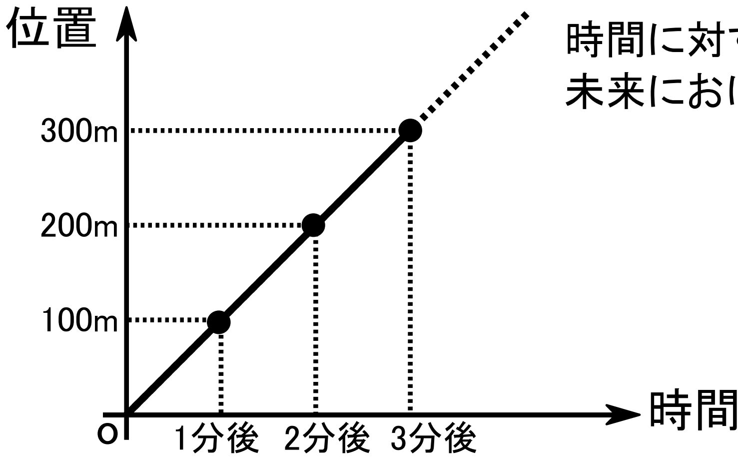
名称	代表的な形	主な用途
多項式関数	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	テイラー展開, 伝達関数
有理関数	$\dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$	伝達関数, インピーダンス関数
三角関数	$\sin(x), \cos(x), \tan(x)$	信号波形の表現
逆三角関数	$\sin^{-1}(x), \cos^{-1}(x), \tan^{-1}(x)$	角度の算出
指数関数	a^x, e^x	複素正弦波など
対数関数	$\log_a(x), \log(x)$	積和変換 デシベル表示

これらの関数を理解しておけば，エンジニアリングでは困らない．

「変化率」に着目する

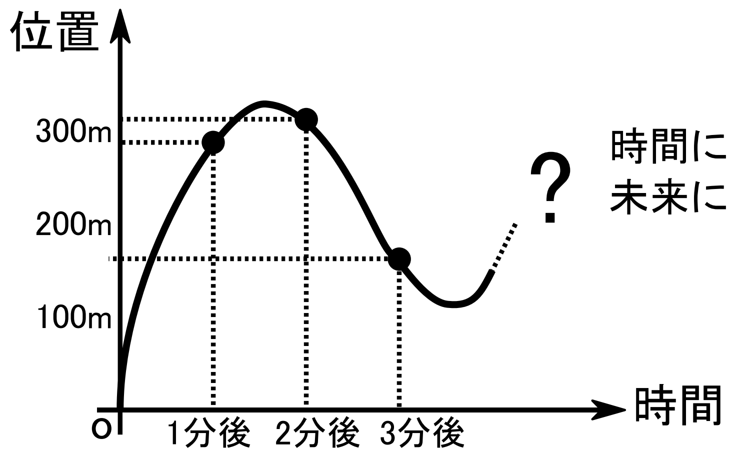
Sample

【変化率が一定】



時間に対する変化率が一定.
未来における位置を予想しやすい.

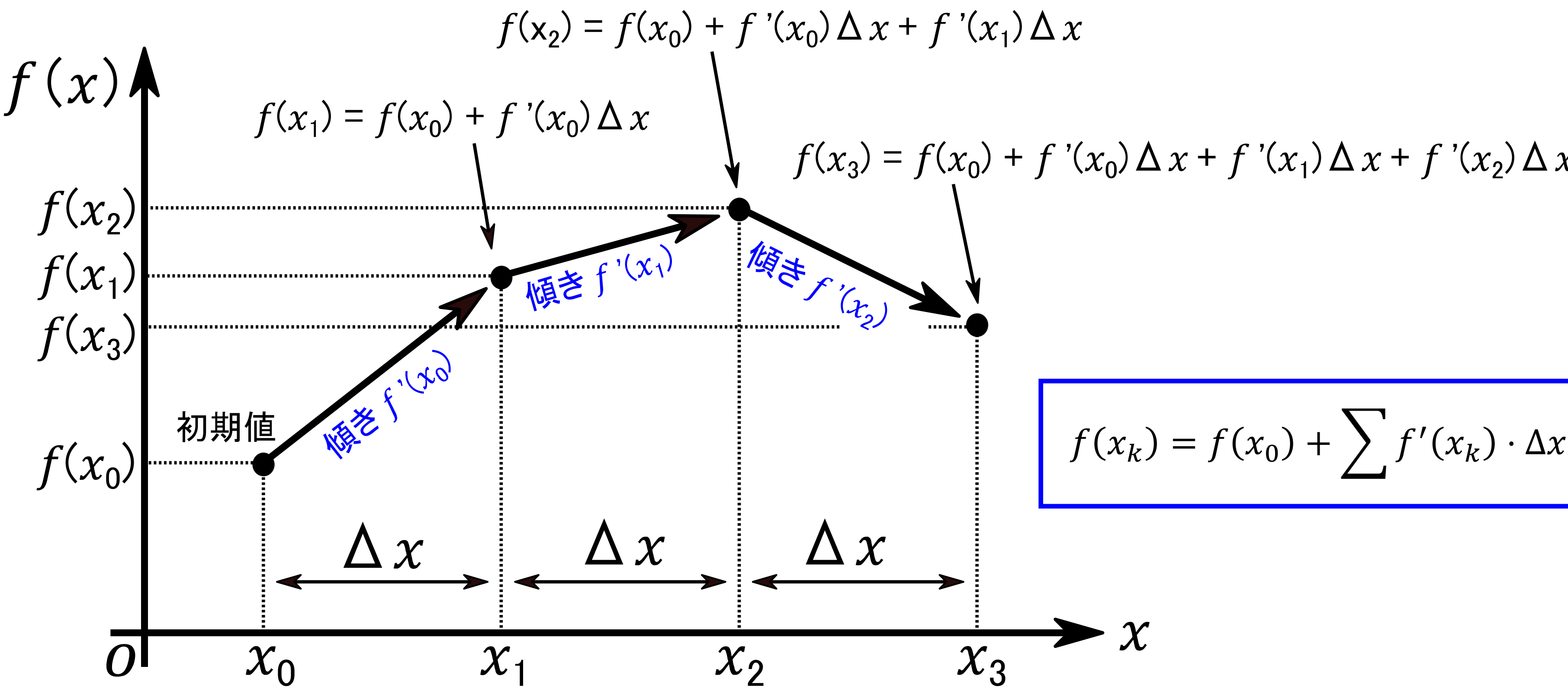
【変化率が一定ではない】



時間に対する変化率が変動する.
未来における位置を予想しづらい.

人間は，変化率が一定ならば未来を予測できる.
変化率が一定であるものを「線形」という.

「変化率」が分かれば未来が分かる



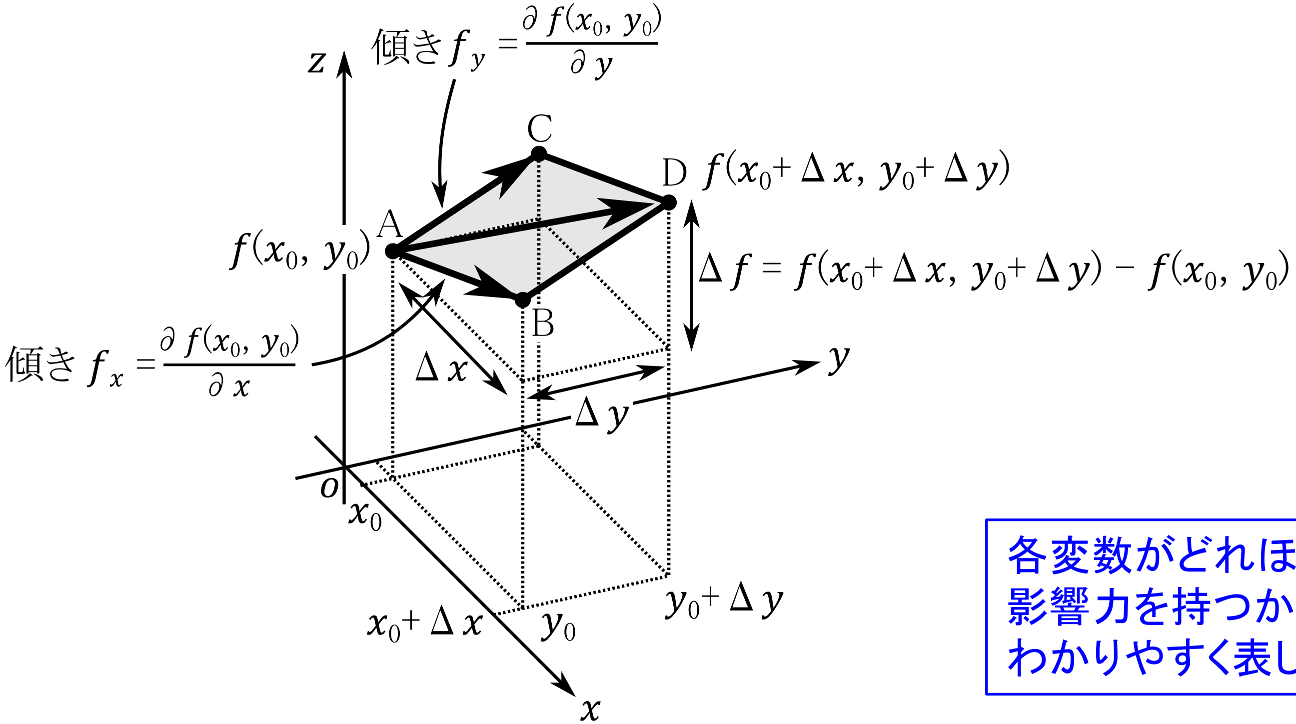
$$f(x_k) = f(x_0) + \sum f'(x_k) \cdot \Delta x$$

- 各点における「微小な直線の傾き」を求める手法を, 「微分」という.
- 各点における「微小な直線の傾き」を表す式を, 「微分方程式」という.
- 微分方程式をもとにしてグラフ全体を再構築する作業を, 「積分」という.

全微分：total differential

ある点 $(x_0,\ y_0)$ を基準として，少しだけ離れた点 $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ まで移動することを考える．
このときの関数の変化を "Δf" と定義する．

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$



各変数がどれほどの
影響力を持つかを
わかりやすく表している．

$\Delta x \to 0$ かつ $\Delta y \to 0$ の極限をとったとき，関数の微小変化 "df" は次のように表現できる．
これを関数 $f(x,y)$ の「全微分」という．

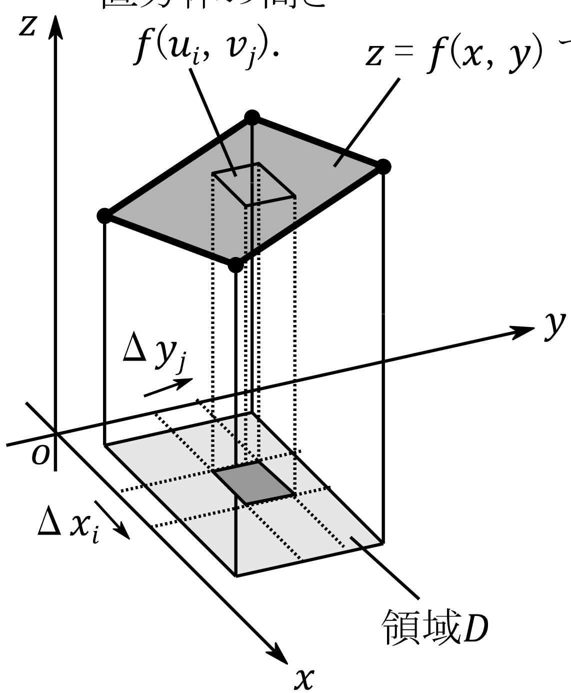
$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

重積分：multiple integral

Sample

2変数関数 “$f(x, y)$”の積分は，曲面 “$z = f(x, y)$” で囲まれた領域の「体積」を求めることに相当する．

積分する範囲を指定するために，xy平面上の領域（Domain）“D” を考える．
この領域Dは，立体の「底面」に相当する．



領域Dをx方向，y方向それぞれに細かく分割する．
分割後の(i, j)番目の底面積を，“$\Delta x_i \cdot \Delta y_j$”とする．
また，この区間内の任意の点を (u_i, v_j) とする．

このとき，1つ1つの立体は，
「底面積が$\Delta x_i \Delta y_j$ で高さが$f(u_i, v_j)$ の直方体」に見える．

よって，関数$f(x, y)$で囲まれた領域の体積Vは次式で表される．

$$V = \sum_{i,j} f(u_i, v_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j$$

上式において “$\Delta x \to 0$” かつ “$\Delta y \to 0$” の極限をとったものを次式で表し，「重積分」と呼ぶ．

$$\boxed{V = \iint_D f(x, y)\, dxdy}$$

重積分における変数変換（1）

重積分を計算したい2変数関数 “$f(x, y)$” の変数 “x” および “y” が，
別の変数 “u” および “v” の関数として表されている状況を考える．

$$\iint_D f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\, dxdy$$

上式は，変数 “u ”および “v” に関する積分に帰着できる．
なお，新しい変数 “u” および “v” が動く領域を “ D' ” とする．

$$\iint_{D'} f\big(x(u, v), y(u, v)\big)\, dudv$$

ここで，“$dxdy$” は「微小な直方体の底面積」を表していたことを思い出す．
新しい変数 “u” および “v” による底面積 “$dudv$” の大きさは，もとの “$dxdy$” と異なる可能性がある．
このままでは，「直方体の“高さ” × “底面積”」によって正しく重積分を計算することができない．